CIRCUITI RC

Studio dei processi di carica di un condensatore in un circuito RC in corrente continua e stima della sua capacità C

a cura di STEFANO VITALI, GIULIA ANZANELLO, MATTEO DE STEFANI, ALBERTO DELLA LIBERA

Realizzato nell'ambito del ***progetto Archimede***
con la supervisione dei Proff. F.Zampieri, F.Breda, A.Carraro
I.S.I.S.S. M.Casagrande, Pieve di Soligo, Marzo 2013

Il presente report si riferisce ad un'esperienza preliminare svolta nell'ambito dello studio dei circuiti oscillanti, finalizzato alla comprensione dei fenomeni di oscillazione elettrica.

E' stato visto che affinchè si instauri, analogamente al caso meccanico, un'oscillazione elettrica (ossia della carica elettrica) all'interno di una catena chiusa di conduttori o circuito elettrico, è necessario che nel circuito siano presenti due *contenitori di energia*, ovvero due dispositivi atti ad immagazzinare energia.

Questi dispositivi sono:

- il condensatore, che immgazzina energia elettrostatica sottoforma di carica elettrica in eccesso accumulata sulle armature. Il parametro da cui dipende l'entità dell'energia immagazzinata è rappresentato dalla *capacità* C del condensatore, una grandezza fisica caratteristica del sistema e dipendente solo dai suoi parametri geometrici.

- l'induttanza, che immagazzina invece energia sottoforma di campo magnetico indotto dal passaggio di corrente. Il parametro da cui dipende l'entità dell'energia immagazzinata è rappresentato dal *coefficiente di autoinduzione* L, chiamato con abuso di linguaggio *induttanza*, una grandezza fisica caratteristica del sistema e, come per la capacità, dipendente solo dai suoi parametri geometrici.

I due dispositivi si comportano quindi come due contenitori, nei quali l'energia fornita da un generatore esterno inserito nel circuito, può essere travasata. In tal senso, un'oscillazione sarà proprio dovuta ad un *palleggio* di tale energia da un contenitore all'altro, che avviene esattamente come nei sistemi meccanici analoghi al caso elettrico (esempio il pendolo semplice o il sistema massa-molla).

Il circuito che comprende i due dispositivi, associati alla resistenza reale R di cavi e dispositivi, prende il nome di circuito RLC. Se alimentato da una tensione sinusoidale (alternata), permette di originare un'oscillazione elettrica, che si presta ad usi svariatissimi: dalla codifica di un segnale per veicolare un'informazione (come nel caso di una radio) all'effetto di filtro nei confronti di un segnale in ingresso che va a smorzare o a forzare l'oscillazione stessa.

Prima di esaminare l'instaurarsi dell'oscillazione nel circuito RLC, in questa esperienza è stato preso in esame, preliminarmente, il comportamento di un condensatore, inserito da solo in un circuito alimentato da corrente continua.

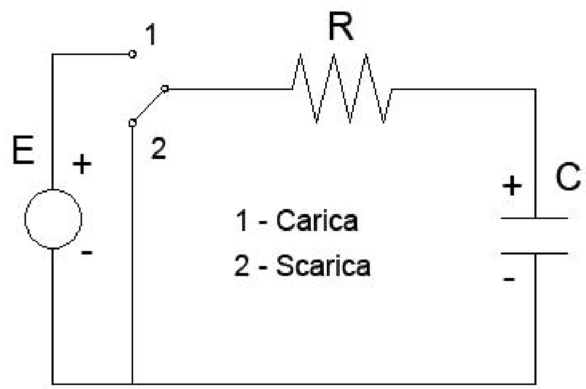
La tensione fornita dal generatore permette la carica del sistema, che avviene secondo modalità del tutto particolari, dipendenti dal valore del parametro di capacità C.

Lo studio dei processi di carica, evidenziando l'andamento della differenza di potenziale ΔV misurata ai capi del condensatore in funzione del tempo t (misurato a partire dall'istante di chiusura del circuito) permette di evidenziare una dipendenza di tipo esponenziale decrescente fra ΔV e t, definendo un tempo caratteristico τ.

Il circuito RC

Immaginiamo di collegare in serie ad un generatore di tensione continua V, un condensatore di capacità C. Sia R la resistenza del circuito, comprendente ovviamente quella interna del generatore, quella dei fili e quella di un opportuno resistore ohmico che viene inserito per controllare i tempi di carica/scarica del condensatore, come sarà chiaro più avanti.

Progettiamo il circuito in modo da inserire un interruttore T o switch, che permetta di collegare e scollegare il condensatore al generatore di tensione, in modo che nella prima modalità (posizione 1) la corrente continua possa fluire caricando il condensatore e nella seconda modalità (posizione 2) il generatore venga scollegato ed il sistema si scarichi sulla resistenza R.



Un siffatto circuito ci dà la possibilità di esaminare separatamente i processi di carica e scarica e inserendo un voltmetro in parallelo, ai capi di R, determinare l'andamento della tensione $V(t)$ in funzione del tempo t.

Una volta chiuso il circuito di carica, la tensione erogata dal generatore inizia ad accumulare le cariche su una piastra del condensatore. L'equazione che regola la carica del sistema, grazie alla legge di Kirchhoff delle maglie, è:

$$V = V_R + V_C$$

ove V è la tensione costante erogata dal generatore, V_R è la caduta di tensione ai capi del resistore R e V_C la differenza di potenziale che si andrà a generare ai capi del condensatore.

Nell'ipotesi che il resistore sia ohmico, si ha ovviamente che $V_R = I(t) \cdot R$, ove $I(t)$ rappresenta la corrente, variabile col tempo, che fluisce ai capi di R.

Ipotizzando che il condensatore sia ideale, abbiamo che $V_C = \dfrac{q(t)}{C}$, ove $q(t)$ è la carica elettrica (dipendente dal tempo), che si accumula sulle piastre del condensatore.

Se è $I(t) = \dfrac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$, allora l'equazione che regola il processo di carica è:

$$V = R \cdot \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{q(t)}{C}$$

Si tratta di un'*equazione differenziale* (una equazione, cioè che ha per incognita una funzione) detta *lineare a variabili separabili*, la cui soluzione $q(t)$, ricavata con metodi che coinvolgono il concetto di integrazione (e sui quali dobbiamo necessariamente sorvolare), rappresenta una funzione di tipo esponenziale, dalla quale si ricava, con una derivazione e sfruttando la prima legge di Ohm, l'espressione cercata che rappresenta la dipendenza della V_C dal tempo:

$$V_C(t) = V_{max} \cdot \left(1 - e^{-\dfrac{t}{\tau}}\right)$$

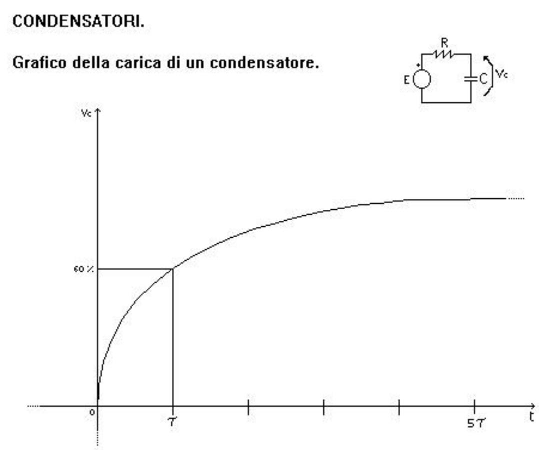
ove V_{max} è la massima differenza di potenziale raggiungibile ai capi del condensatore quando è completamente carico (idealmente, pari a quella fornita dal generatore, ossia la nostra V) e τ detta *costante di tempo* o *tempo caratteristico*, è tale per cui:

$$\tau = RC$$

e il cui significato fisico sarà chiarito in seguito.

La curva esponenziale di carica (ideale o teorica) è quella rappresentata in figura:

Notiamo un classico andamento esponenziale, che sottolinea come il processo avvenga rapidamente all'inizio e tenda asintoticamente alla fase finale in cui ai capi del condensatore si avrà la stessa tensione fornita dal generatore. Per tale motivo è presente un asintoto orizzontale $V = V_{max}$.



Il tempo caratteristico τ

Sul significato di τ si può facilmente indagare. Immaginiamo di attendere, dall'istante di chiusura di T esattamente un tempo $t = \tau$.

Nel qual caso, la tensione raggiunta ai capi del condensatore sarà:

$$V_C(t) = V_{max} \cdot (1 - e^{-1})$$

e quindi:

$$\frac{V_C(t)}{V_{max}} = 1 - 1/e \simeq 0,632$$

Il significato fisico della costante di tempo è allora il seguente: tempo necessario affinchè il processo di carica sia completato al 63 %.

Se attendiamo $t = 2\tau$ il processo sarà allora completo all, 86 % e dopo 3τ il processo si può dire completo al 95 %, benchè idealmente servirebbe un tempo infinito per completare la carica[1].

Ottenimento sperimentale e studio della relazione $V_C(t)$

Nel nostro caso abbiamo costruito con l'ausilio delle basette del laboratorio il circuito di carica, usando un condensatore cilindrico, un resistore ohmico di tipo ceramico e come generatore di tensione un trasformatore a tensione variabile, impostato sui $3 \div 5\,V$ costanti. Abbiamo collegato ai capi del condensatore un voltmetro analogico (tester o multimetro). Una volta chiuso il circuito abbiamo notato l'incremento graduale della tensione, che dal valore nullo (nell'istante iniziale), raggiungeva il valore asintotico, provando ad annotare ogni cinque secondi il valore della tensione fornita dal nostro voltmetro.

Abbiamo subito riscontrato una difficoltà tecnica: la scelta iniziale dei valori di C e R non era ottimale, poichè il processo avveniva troppo rapidamente, esaurendosi nel giro di una decina di secondi o meno.

Abbiamo compreso la necessità di calibrare opportunamente capacità e resistenza per poter seguire attentamente il fenomeno e campionarlo con almeno una ventina di dati di tensione-tempo. Un tempo caratteristico troppo basso non ci darebbe la possibilità di campionare i valori di V e t. Viceversa, un tempo troppo grande darebbe il problema inverso, ossia dei valori tutti uguali (visto che variano di poco, al di sotto della sensibilità dello strumento), producendo un andamento *a gradino* che non ci consentirebbe poi il *fit* della relazione analitica.

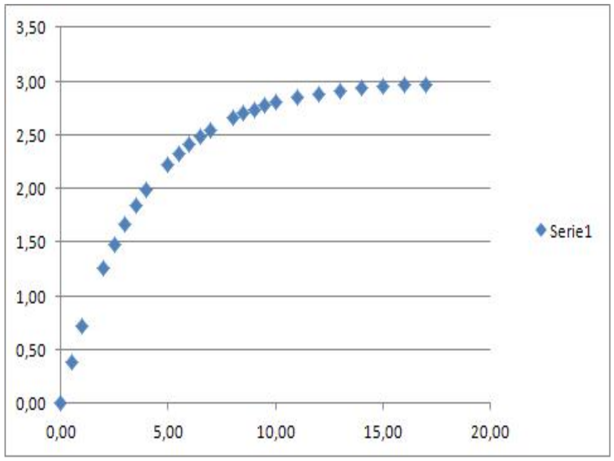
L'influenza della scelta di R e C sui tempi di carica è stata sottolineata precedentemente. Avendo la possibilità di usare solo condensatori di capacità fissate (più o meno sui $6800\,\mu F$), abbiamo scelto opportunamente dei resistori che rallentassero ad hoc i tempi di carica.

Un buon compromesso è stato: $C = 6800\,\mu F$ e $R = 2\,k\Omega$ che dando una $\tau = 13,6\,s$, permette di studiare il processo ed ottenere una buona disposizione dei punti sperimentali sul piano $t\,vs\,V$.

Abbiamo tracciato diverse curve sperimentali, ripetendo la carica più volte, evidenziando un andamento sperimentale che è esattamente quello aspettato dalla relazione teorica di cui sopra.

Nel grafico sono riportati i 15 punti misurati sperimentalmente che si riferiscono alle coppie tempo-tensione. Si nota la classica forma di curva a saturazione verso il valore, in questo caso, $V_{max} = 3\,V$.

[1] Convenzionalmente, si considera completo il processo a $t = 5\tau$..



Analisi dei dati

L'analisi dei dati che abbiamo quindi intrapreso è stata finalizzata alla determinazione sperimentale del tempo caratteristico (deducendolo da considerazioni sui dati sperimentali) e, dalla conoscenza di R che si suppone quindi nota, alla stima della capacità C, secondo il metodo che ora esponiamo.

Inizialmente abbiamo sottoposto la curva di equazione:

$$V_C(t) = V_{max} \cdot \left(1 - e^{-\dfrac{t}{\tau}}\right)$$

ad una simmetria rispetto alla retta $V = V_{max}$ e ad una successiva traslazione di V_{max} sull'asse V. Questa isometria non altera come è noto la forma della curva ma semplifica l'equazione che ora diviene:

$$V_C(t) = V_{max} \cdot e^{-\dfrac{t}{\tau}}$$

Possiamo ora prendere il logaritmo naturale ad ambo i membri, giungendo a dire che:

$$\ln V(t) = \ln V_{max} - \frac{t}{\tau}$$

relazione che su un piano $(t, \ln V)$ rappresenta una retta di pendenza $-\dfrac{1}{\tau}$ e di intercetta $\ln V_{max}$.

A questo punto, la determinazione di τ è legata ad un semplice procedimento di fit lineare, che si può eseguire col metodo dei minimi quadrati o, come abbiamo fatto noi, usando le funzioni PENDENZA e INTERCETTA di Excel.

Dalla stima di τ si deduce subito il valore di C, potendolo quindi confrontare col valore di aspettazione (nel nostro caso $C^* = 6800\,\mu F$).

La stima migliore è stata $C = 6812\,\mu F$, con un errore inferiore al 2%.

Il procedimento è stato poi implementato da M.Stefani mediante una macro di VB incorporata in un foglio Excel che dopo aver chiesto in input le coppie di valori tempi-tensioni, esegue il fit dei dati e restituisce i valori stimati di C e V_{max}, realizzando anche i relativi grafici.

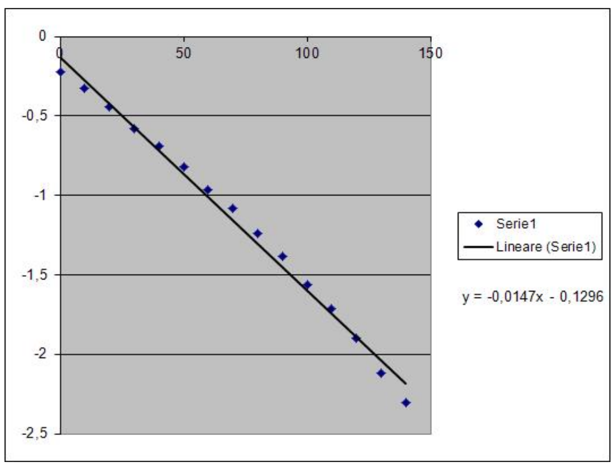


Figura 1: Piano semilogaritmico $(t, \ln V)$ in cui è stata tracciata la retta che corrisponde all'andamento sperimentale dei punti. E' stata sovrapposta anche la retta di tendenza, il cui coefficiente angolare permette di dedurre il valore di C